Université Sultan Mly Slimane
FP de Khouribga

Année Univ. 2018–2019
Filière: SMIA (S2)

Fiche TD 2

Destribuée mercredi 2019

Responsable: S. NAJIB

I. Applications linéaires, Rang d'une famille de vecteurs

Exercice 1

On considère les applications:

$f_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (x + y + 1, x, y) \in \mathbb{R}^3$;
$f_2 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (2x - z, y + z) \in \mathbb{R}^2$;
$f_3 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (xy, x - y) \in \mathbb{R}^2$;
$f_4 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto x + y + 2z \in \mathbb{R}$;
$f_5 : P \in \mathbb{R}_2[X] \longmapsto P - (X - 2)P' \in \mathbb{R}_2[X]$;
$f_6 : P \in \mathbb{R}_3[X] \longmapsto (P(-1), P(0), P(1)) \in \mathbb{R}^3$.

1) Parmi les applications f_1, f_2, f_3, f_4, préciser lesquelles qui sont linéaires.

2) Pour celles qui sont linéaires, déterminer une base du noyau et une base de l'image. En déduire leur rang. Ces applications sont elles injectives? surjectives? bijectives?

Exercice 2

Soit E un $K-$ev et $f \in \mathcal{L}_K(E)$ nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f = 0_{\mathcal{L}_K(E)}$.

Montrer que $Id_E - f$ est un automorphisme de E, et déterminer son automorphisme réciproque.

Exercice 3

Soit E un $K-$ev et $f, g \in \mathcal{L}_K(E)$.

1) Montrer que $g \circ f = 0 \Longleftrightarrow Imf \subset Kerg$.
2) Comparer $Kerg \cap Kerf$ et $Ker(f + g)$.
3) Comparer $Imf + Img$ et $Im(f + g)$.
4) Comparer $Kerf$ et $Kerf^2$ puis Imf et Imf^2
5) Montrer les équivalences suivantes:
   (a) $Kerf \cap Imf = \{0_E\} \Longleftrightarrow Kerf^2 = Kerf$.
   (b) $E = Imf + Kerf \Longleftrightarrow Imf = Imf^2$.

Exercice 4

1) Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes de $\mathbb{R}^4$:

(a) (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (1,-1,1,-1)$, $u_3 = (1,0,1,1)$.

(b) (v_1, v_2, v_3, v_4) avec $v_1 = (1,1,0,1)$, $v_2 = (1,-1,1,0)$, $v_3 = (2,0,1,1)$, $v_4 = (0,2,-1,1)$.

2) Soit $E = \mathbb{R}^{]-1,1[}$: le $\mathbb{R}-$ev des fonctions définies sur $]-1,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère dans E les fonctions:

$$f_1 = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\ f_2 = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},\ f_3 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ f_4 = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Calculer le rang de la famille (f_1, f_2, f_3, f_4).

Exercice 5

Soit E un $K-$ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f, g \in \mathcal{L}_K(E)$.

1) Montrer l'équivalence:

$$Kerf = Imf \Longleftrightarrow f^2 = 0_{\mathcal{L}_K(E)} \text{ et } n = 2rg(f).$$

2) Supposons que $rg(f^2) = rg(f)$. Montrer que:

(a) $Imf^2 = Imf$ et $Kerf^2 = Kerf$.

(b) Imf et $Kerf$ sont supplémentaires dans E.

3) Supposons que $f + g$ est bijectif et $g \circ f = 0_{\mathcal{L}_K(E)}$.

Montrer que $rg(f) + rg(g) = n$.

4) Supposons que $g^3 = 0_{\mathcal{L}_K(E)}$. Montrer que $rg(g) + rg(g^2) \leq n$.

II. Opérations sur les matrices

Exercice 6

On considère les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer lorsque cela est bien définie les produits de matrices suivants: $AB, BA, AC, CA, AD, AE, BC, BD, BE, CD, DE$ et DEA.

2) Calculer $(A - 2B)C$, ${}^tC.A$, ${}^tC.B$ et ${}^tC({}^tA - 2\,{}^tB)$ avec ${}^tM$ désigne la matrice transposée de M.

Exercice 7

On considère la matrice: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Trouver toutes les matrices à coefficients réels X, X' telles que: $AX = A$ et $X'A = A$.

Exercice 8

On considère les matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_3$.

Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9

On considère la matrice: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
2) On considère les suites récurrentes suivantes:

$$u_n = u_{n-1} + 2v_{n-1} + 3w_{n-1},\ v_n = v_{n-1} + 2w_{n-1},\ w_n = w_{n-1}.$$

Calculer les termes $u_n,\ v_n$ et w_n en fonction de $u_0,\ v_0,\ w_0$ et n.

Exercice 10

On considère la matrice: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$.
2) En déduire que A est inversible puis calculer son inverse.
3) Retrouver l'inverse de A en utilisant la méthode de Gauss.

Exercice 11

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère la matrice: $J = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/4 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$ et l'ensemble $F = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) /\ JA = AJ\}$.

1) Calculer J^2 et conclure.
2) Montrer que $F = Vect\{(I_2, J)\}$. En déduire une base et la dimension de F.

II. Application linéaire et Matrice

Exercice 12

On considère les deux applications linéaires: $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (x + 2y, 2x - y, 2x + 3y) \in \mathbb{R}^3$ et
$g : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (x - 2y + z, 2x + y - 3z) \in \mathbb{R}^2$.

Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{B}_1 = (f_1, f_2, f_3)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

1) Déterminer les matrices de $f,\ g,\ f \circ g,\ g \circ f$ dans les bases canoniques de leurs espaces de définition respectifs. En déduire les expressions de $(f \circ g)(x, y, z)$ et $(g \circ f)(x, y, z)$.

2) On considère les vecteurs: $e'_1 = e_1,\ e'_2 = e_1 - e_2,\ f'_1 = f_1,\ f'_2 = f_1 + f_2$ et $f'_3 = f_1 + f_2 + f_3$. Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ et $\mathcal{B}'_1 = (f'_1, f'_2, f'_3)$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.
3) Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ puis la matrice de passage Q de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}'_1$.
4) Donner la matrice de f dans les $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}_1$ puis dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}'_1$ et enfin celle de g dans les bases $\mathcal{B}'_1$ et $\mathcal{B}'$.